نموذجية لمقرر الهندسة التفاضلية سنة رابعة رياضيات (تحليل) الفصل الأول ٢٠١٦ - ٢٠١٧

②

$$r(u,v)=(u,v,u\sin v)$$

$$E=(r_u)^2=(1,0,\sin v)^2=1+\sin^2 v,\quad \vec{r_v}=(0,1,u\cos v),\quad F=r_u\cdot r_v=u\sin v\cos v$$

$$G=r_v^2=1+u^2\cos^2 v$$

$$\vec{n}=\vec{r_u}\times\vec{r_v}=\frac{(-\sin v,-u\cos v,1)}{\sqrt{1+\sin^2 v+u^2\cos^2 v}},$$

$$\vec{r}_{uu}=(0,0,0),\quad \vec{r}_{uv}=(0,0,\cos v),\quad \vec{r}_{vv}=(0,0,-u\sin v)$$

$$L=\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}=0,\quad M=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}=\frac{\cos v}{\sqrt{1+\sin^2 v+u^2\cos^2 v}},\quad N=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}=\frac{-u\sin v}{\sqrt{1+\sin^2 v+u^2\cos^2 v}}$$

$$LN-M^2=\frac{-\cos^2 v}{(1+\sin^2 v+u^2\cos^2 v)}<0$$ جميع نقاط السطح زائدية

٢) $\vec{r_u}\times\vec{r_v}\neq 0$ فالسطح نظامي

٣) الخطوط الإحداثية $u=const$ تكون v متحول ويكون الخط $z=\sin y$ هو منحني الجيب يقع في المستوي $x=c$

الإحداثية $v=const$ تكون u متحول ويكون $z=cx$ هو خط مستقيم واقع في المستوي $y=c$

٤) الخطوط المقاربة تحقق $II=0$ نجد:

$$II=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2=0$$

$$\Rightarrow 2\cos v\,du\,dv-u\sin v\,dv^2=0\Rightarrow 2\frac{du}{u}=tg\,v\,dv$$

$$\Rightarrow 2\ln u=-\ln\cos v+\ln c\Rightarrow \frac{u^2}{c}=\frac{1}{\cos v}\Rightarrow u^2=\frac{c}{\cos v}$$

٥) ليكن (φ,ψ) مماس ما للسطح عندئذ:

$$K_n=K(\varphi,\psi)=\frac{L\varphi^2+2M\varphi\psi+N\psi^2}{E\varphi^2+2F\varphi\psi+G\psi^2}$$

إن K_n دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ ψ,φ حيث إن المعاملات L,M,N,E,F,G لا تتعلق بالمنحني (φ,ψ) إنما بموضع النقطة M. بفرض $\varphi=\rho\cos\theta,\ \psi=\rho\sin\theta$ عندئذ:

$$K_n=K_n(\varphi)=\frac{L\cos^2\varphi+2M\cos\varphi\sin\varphi+N\sin^2\varphi}{E\cos^2\varphi+2F\cos\varphi\sin\varphi+G\sin^2\varphi}$$

حيث إن $K_n(\varphi)$ دالة مستمرة و $K_n(0)=K_n(2\pi)$ لذلك فإن K_n إما دالة ثابتة أو لها قيمة صغرى وقيمة عظمى. تسمى القيم القصوى بالمناحي الأساسية، ينتج من العلاقة الأخيرة بفرض $K_n=K(\varphi,\psi)$ نجد:

$$(L-KE)\varphi^2+2(M-KF)\varphi\psi+(N-KG)\psi^2=0$$

هي علاقة في ψ,φ ومع اعتبار أن مشتق التقوس الأساسي وفق المناحي الأساسية معدوم وباشتقاق العلاقة الأخيرة مرة بالنسبة لـ φ وأخرى بالنسبة لـ ψ نجد:

$$(L-KE)\varphi+(M-KF)\psi=0$$

$$(M-KF)\varphi+(N-KG)\psi=0$$

وهما معادلتان جبريتان خطيتان بالنسبة لـ ψ,φ تملكان حلاً غير الحل الصفري حيث أنه في النقطة المعطاة للسطح دوماً يوجد مناحي أساسية نجد أن:

ومنه نحصل على المعادلة المطلوبة

$$\begin{vmatrix} L-KE & M-KF \\ M-KF & N-KG \end{vmatrix} = 0$$

انه عند النقطة $\pi/2 < t$ عند نجد أن ،

$EG-F^2=\sqrt{2}$, $E=2$, $F=0$, $G=1$, $L=0$, $M=0$, $N=\frac{-t}{\sqrt{2}}$

بالتعويض في المعادلة السابقة:

$\sqrt{2}K^2+Kt\sqrt{2}=0 \to K(\sqrt{2}K+t) \Rightarrow K_1=0$, $K_2=-\frac{t}{\sqrt{2}}$ ، $\vec{r}'''=(2\sin t,-2\cos t,0)$

$r'=(-2\sin t, 2\cos t, 4)$, $r''=(-2\cos t,-2\sin t,0)$, عند النقطة $t=0$ نجد

$\vec{r}'=(0,2,4)$, $\vec{r}''=(-2,0,0)$, $\vec{r}'''=(0,-2,0)$

$$K(t)=\frac{|\vec{r}'\times\vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}=\frac{|-8\vec{j}+4\vec{k}|}{(\sqrt{20})^3}=\frac{1}{10}=\frac{1}{10}$$

$$\tau(t)=\frac{(r',r'',r''')}{(r'\times r'')^2}=\frac{16}{80}=\frac{1}{5}$$

(ا) ب) $T'^1 = T^1_\alpha g^{\alpha 1} = T^1 g^{11} + T^1_2 g^{21} = x\cdot 1 = x$

ج) $T = T^1_1 + T^2_2 = x+y$

$$g_{ij}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\\ \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial y}{\partial \bar{y}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial x}{\partial \bar{y}}\\ \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial y}{\partial \bar{y}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\bar{x} & 2\bar{x}\\ 2\bar{y} & -2\bar{y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\bar{x} & 2\bar{y}\\ 2\bar{x} & -2\bar{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\bar{x}^2 & 0\\ 0 & 8\bar{y}^2\end{pmatrix}$$

$\{x=\bar{x}^2+\bar{y}^2, y=\bar{x}^2-\bar{y}^2 \Rightarrow \bar{x}=\sqrt{\frac{x+y}{2}}, \bar{y}=\sqrt{\frac{x-y}{2}}\}$

$\Gamma_{1,11}=\frac{1}{2}(\partial_1 g_{11})=8\bar{x}$, $\Gamma_{2,22}=8\bar{y}$, $\Gamma_{2,22}=8\bar{y}$ والبقية معدومة

البقية معدومة

$$\Rightarrow g^{ij}=\frac{1}{g_{ij}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{8\bar{x}^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{8\bar{y}^2}\end{pmatrix}\Rightarrow \Gamma^2_{22}=\Gamma_{2,22}g^{22}=\frac{1}{\bar{y}}$$

$\Rightarrow \Gamma^1_{11}=\Gamma_{1,11}g^{11}=\frac{1}{\bar{x}}$

$$\bar{T}^1_2=T^\alpha_\beta\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{y}}\cdot\frac{\partial \bar{x}}{\partial x^\alpha}=T^1_1\frac{\partial x}{\partial \bar{y}}\cdot\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}+T^1_2\frac{\partial y}{\partial \bar{y}}\cdot\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}+T^2_1\frac{\partial x}{\partial \bar{y}}\cdot\frac{\partial \bar{x}}{\partial y}+T^2_2\frac{\partial y}{\partial \bar{y}}\cdot\frac{\partial \bar{x}}{\partial y}=$$

$$=(\bar{x}^2+\bar{y}^2)(2\bar{y})\frac{1}{4\bar{x}}+(2\bar{y}^2)\cdot(-2\bar{y})\left(\frac{1}{4\bar{x}}\right)+(2\bar{x}^2)(2\bar{y})\left(\frac{1}{4\bar{x}}\right)+(\bar{x}^2-\bar{y}^2)(-2\bar{y})\frac{1}{4\bar{x}}=$$

$$\bar{T}^1_{2,2}=\partial_2\bar{T}^1_2+\bar{T}^\alpha_2\bar{\Gamma}^2_{\alpha 1}-\bar{T}^1_\alpha\bar{\Gamma}^\alpha_{22}=\bar{x}+\bar{T}^1_2\Gamma^2_{11}+\bar{T}^2_2\Gamma^2_{21}-\bar{T}^1_1\Gamma^1_{12}-\bar{T}^1_2\Gamma^2_{22}=\bar{x}-$$

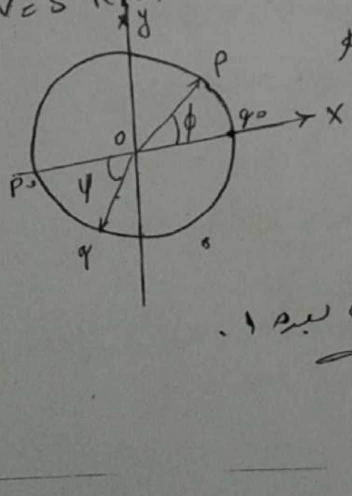
(١) نقول عن M^n أنه منطوي تفاضلي إذا كان M^n منطوي تبولوجي هاوسدورف يحقق ما يلي:

(١) توجد في M^n مجموعة من الخرائط $A=\{(U_\alpha,X_\alpha),\alpha\in I\}$ (٢) $M^n=\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$ بحيث $X_\alpha(U_\alpha)$ $\alpha\in I$ مجموعات مفتوحة في R^n

(٣) الأطلس A أعظمي (من أجل أي خارطتين (U,X) , (V,Y) من A بحيث $U\cap V\neq\phi$ فإن التطبيق $X^{-1}\circ Y$ ... والمنسجمة معه تنتمي إليه).

ب) الدائرة الواحدة منطوي تفاضلي لنفرض $S^1=x^2+y^2=1$ دائرة الواحدة في R^2 من الواضح أن $S^1=U\cup V$ ولنفرض $U=S^1/(p_0)$ ، $V=S^1/(q_0)$

وليكن $\phi(p)=\measuredangle(\vec{op},\vec{ox})\in]-\pi,\pi[$ ، $p\in U$ و $\psi(q)=\measuredangle(\vec{oq},\vec{op_0})$ ومنه $\{(U,\phi),(V,\psi)\}$ أطلس على S^1 و ϕ ، ψ تقابلات مستمرة ولنفرض $W=U\cap V$ نجد،



$$\psi\circ\phi^{-1}(t)=\begin{cases}t+\pi; & t\in]-\pi,0[\\ t-\pi; & t\in]0,\pi[\end{cases}$$

ان $\psi\circ\phi^{-1}$ تطبيق أملس لذلك فإن S^1 هو منطوي تفاضلي لبعد ١.

انتهت الأجوبة د. محمد ...